

Test d'admission : Physique (3h)

Mai 2023

- Ce devoir est composé de 3 exercices **indépendants**. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- **Changer de page** au début de chaque exercice.
- Penser à **numéroter** les copies.
- L'argumentation des réponses devra être **précise, concise et rigoureuse**.
- Toute application numérique non suivie d'une **unité correcte** sera comptée fausse.
- Les résultats littéraux demandés par l'énoncé seront **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.

I Voyage Terre-Mars

Données utiles :

- Masse du Soleil : $M_S = 2.10^{30}$ kg.
- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ USI

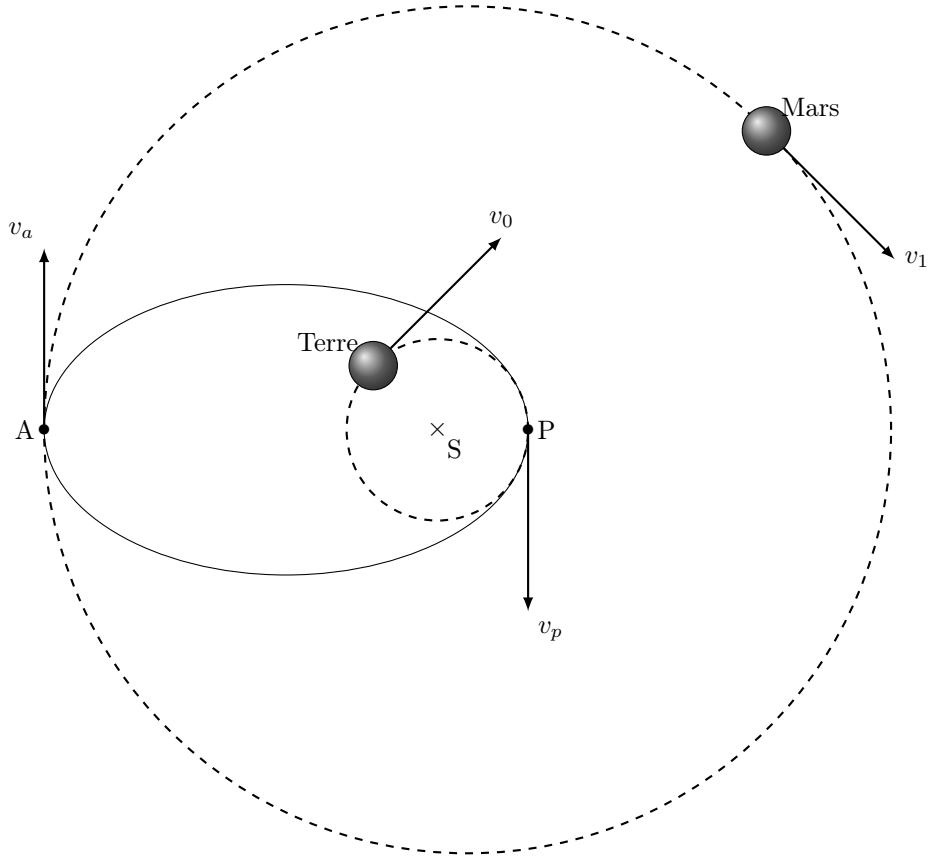
I.1 Etude préliminaire d'un satellite en orbite circulaire

Les planètes sont des satellites naturelles du Soleil, à savoir ils sont en orbite (que l'on supposera circulaire de rayon r) autour du Soleil. On se propose dans cette première partie d'établir les résultats généraux classiques d'un satellite en mouvement circulaire.

1. Faire un schéma du point M (la terre de masse m que l'on supposera ponctuel) autour du Soleil S (de masse M_S et de rayon R_S) et dessiner la force d'attraction gravitationnelle \vec{F}_{S-M} qu'exerce le Soleil sur la Terre. Faire également figurer r (le rayon de l'orbite terrestre) et le repère de Frenet (\vec{n}, \vec{t}) lié à la Terre.
2. Rappeler l'expression générale du vecteur accélération \vec{a} dans le repère de Frenet.
3. Appliquer la deuxième loi de Newton dans le repère de Frenet lié à M et en déduire que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.
4. Etablir l'expression générale de la vitesse d'un satellite en orbite circulaire $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{r}}$.
5. Définir la période de révolution T en fonction de la vitesse v et du rayon d'orbite r . En déduire que le rapport $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$ est une constante. Comment se nomme cette loi ? Faire l'application numérique.
6. A l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_c en fonction de r .
7. On admettra que l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle vaut $E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{r}$. Montrer que l'énergie mécanique E_m d'un satellite en orbite circulaire vaut $E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{2r}$.

I.2 Ellipse de HOHMANN

Pour effectuer le voyage Terre - Mars, il faut transférer un objet (dans un vaisseau) de l'orbite terrestre à l'orbite martienne. Durant ce transfert, on néglige l'attraction des planètes pour ne retenir que celle du Soleil. L'une des trajectoires possibles pour ce vaisseau est une ellipse (dite de HOHMANN), dont le Soleil est un des foyers, tangente à l'orbite terrestre en son périhélie P , tangente à l'orbite martienne en son apogée A et coplanaire à l'orbite terrestre. On assimile la trajectoire de la Terre autour du Soleil à un cercle de rayon a_0 décrit à la vitesse $v_0 = 30 \text{ km.s}^{-1}$ et celle de Mars à une orbite circulaire coplanaire à l'orbite terrestre de rayon $a_1 = na_0 \approx 1,5a_0$. Lorsque le vaisseau est en P **sur la trajectoire elliptique** sa vitesse est notée $v_p > v_0$, et lorsque le vaisseau est en A **sur la trajectoire elliptique** sa vitesse est notée $v_a < v_1$. On résume la situation sur le schéma ci-dessous (échelle non respecté entre a_0 et a_1 afin de mieux mettre en évidence l'ellipse de transfert) :



8. A l'aide du schéma donner une définition des points **périgé** et **apogé** d'une ellipse. Citer la deuxième loi de KEPLER et en déduire une comparaison entre les vitesses v_p et v_a . Justifier.
9. On définit a le demi grand axe de l'ellipse comme la moitié de la distance séparant le périgé de l'apogé. Déterminer l'expression de a en fonction de a_0 et a_1 , puis en fonction de a_0 et n .
10. Sachant que la Terre et Mars ne sont soumis qu'à la force gravitationnelle avec le soleil et qu'ils décrivent des mouvements circulaires, à l'aide de la partie 1, exprimer leur vitesse respective v_0 et v_1 en fonction de a_0 et a_1
11. En déduire la vitesse orbitale v_1 en fonction de v_0 et n . Faire l'application numérique.
12. A l'aide la troisième loi de Kepler déterminer la durée T_1 de l'année martienne (en années terrestres) en fonction de T_0 , a_0 et a_1 , puis en fonction de T_0 et n . Faire l'application numérique.

Sur la trajectoire elliptique au point P l'énergie mécanique E_m du vaisseau peut être calculée de deux manières différentes. D'une part en P la formule de l'énergie mécanique E_m d'un satellite en orbite circulaire (cf. formule de la partie 1) tient toujours vrai même pour un satellite en orbite elliptique pour peu que l'on remplace le rayon r par le demi grand axe a . D'autre part on peut calculer E_m comme la somme de son énergie cinétique à vitesse v_p et de son énergie potentielle (cf. formule de la partie 1).

13. Ecrire la conservation (l'égalité) de l'énergie mécanique en P . En déduire quelle doit être la vitesse v_p de l'engin spatial au point P de l'ellipse de Hohmann (on exprimera v_p en fonction de \mathcal{G} , M_S , a_0 et n) ? Puis montrer que $v_p = v_0 \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. Faire l'application numérique.
14. Analoguement au point A , quelle doit être la vitesse v_a de l'engin spatial au point A de l'orbite de Hohmann (on exprimera v_p en fonction de \mathcal{G} , M_S , a_0 et n) ? Puis montrer que $v_a = v_1 \sqrt{\frac{2}{n+1}}$? Faire l'application numérique.

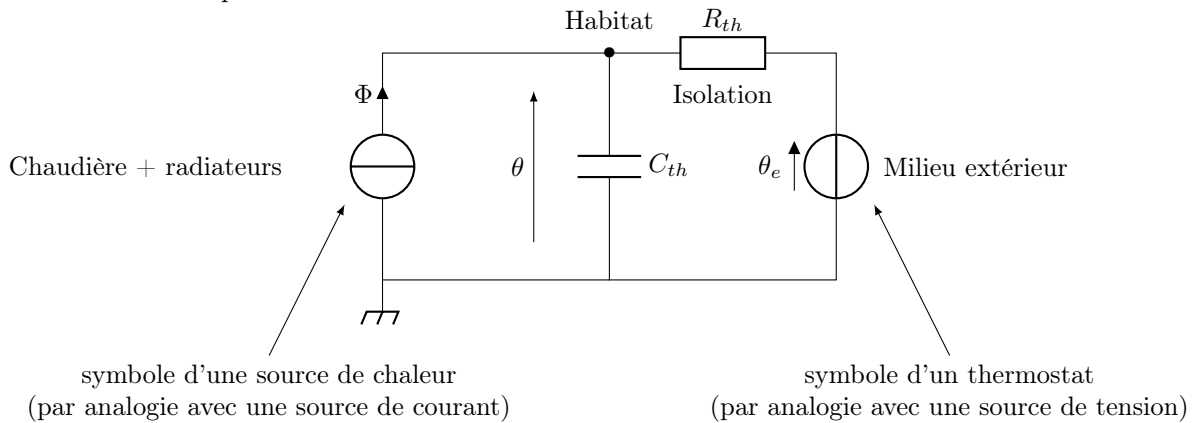
Pour réaliser ce transfert, on allume donc les moteurs en P pour passer de v_0 à v_p puis en A pour passer de v_a à v_1 mais pendant tout le trajet, les moteurs sont éteints : le mouvement s'effectue uniquement sous l'effet de l'attraction gravitationnelle du Soleil.

15. A l'aide de la troisième loi de KEPLER, déterminer la durée du transfert entre la Terre et Mars (en années terrestres).

II Approche simplifiée du comportement thermique d'un habitat

Dans un réseau électrique, la notion de résistance électrique R traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel $u = V_2 - V_1$ existant entre deux points 1 et 2 et le courant i qui circule de l'un à l'autre. Par analogie, dans un réseau thermique, la résistance thermique R_{th} traduit une relation de proportionnalité entre la différence de température $\theta = T_2 - T_1$ existant entre deux endroits et le flux thermique Φ (c.à.d la quantité d'énergie thermique par unité de temps) qui circule de l'un à l'autre. Dans un réseau électrique, la notion de capacité électrique C traduit une relation de proportionnalité entre la dérivée temporelle \dot{u} de la tension u aux bornes d'un condensateur et le courant i le traversant. Par analogie, dans un réseau thermique, on définit la capacité thermique C_{th} d'un système en fonction de la dérivée temporelle $\dot{\theta}$ et du flux thermique Φ .

Le schéma électrique proposé (ci-dessous) est l'image d'un système thermique élémentaire qui permet de fixer globalement les idées concernant le comportement thermique d'un habitat. L'ensemble des radiateurs, alimenté par la chaudière, est assimilé à une source de courant idéale. Pour simplifier, dans toutes les questions qui suivent, la température extérieure θ_e sera toujours supposée constante. Ainsi le milieu extérieur sera assimilé à une source de tension continue. La température $\theta(t)$ de l'habitat sera supposée uniforme dans tout son volume et la capacité thermique de celui-ci sera réduite à C_{th} . Entre l'habitat et l'extérieur est représentée la résistance thermique R_{th} de l'isolation. Le régime permanent est atteint lorsque la température de l'habitat est égale à une valeur de consigne θ_c confortable pour l'utilisateur. La référence de température sera prise ici égale à $0^\circ C$. Par analogie avec une référence de potentiel nulle, on pourra la représenter par le symbole d'une "masse" dans un réseau électrique.

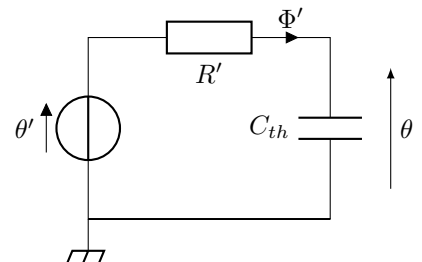


1. Quelle est l'unité usuelle de Φ ?
2. Lorsque le régime permanent est atteint, expliquer pourquoi l'on peut faire abstraction de C_{th} .
3. Sachant que les radiateurs sont situés à l'intérieur de l'habitation, caractériser le mode de transfert thermique entre les radiateurs et l'habitation.
4. On admettra qu'en régime permanent le flux thermique nécessaire au maintien de la température de consigne vaut $\Phi_0 = \frac{\theta_c - \theta_e}{R_{th}}$. Déterminer sa valeur numérique sachant que : $\theta_e = 8,0^\circ C$, $\theta_c = 20^\circ C$ et $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ où l'épaisseur des murs $e = 15,0$ cm, la surface totale de l'habitation en contact avec l'extérieur $S = 150$ m² et la conductivité thermique des murs $\lambda = 500$ mW.m⁻¹.K⁻¹

La température initiale de l'habitat étant supposée égale à la température extérieure, on met celui-ci en chauffe à $t = 0$ en imposant un flux thermique égal à Φ_0 . On pose $\tau_0 = R_{th}C_{th}$.

5. En utilisant les équivalences Thévenin-Norton (non demandé ici), on montre que l'installation est équivalente au circuit ci-contre avec $R' = R_{th}$ et $\theta' = R_{th}\Phi_0 + \theta_e$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ s'écrit :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau_0} = \frac{\theta_e}{\tau_0} + \frac{\Phi_0}{C_{th}}$$



6. Résoudre l'équation différentielle et déterminer $\theta(t)$ en fonction des θ_e , R_{th} , Φ_0 , τ_0 et t .
7. Tracer l'allure de $\theta(t)$ et expliquer, graphiquement, comment déterminer la valeur de τ_0 .
8. Sachant que $C_{th} = 3,0$ MJ.K⁻¹, déterminer la valeur numérique du temps (en secondes et en heures) t_1 nécessaire pour atteindre la valeur de consigne θ_c à 5% près. Commenter la valeur obtenue.

III Le bassin océanique de Centrale Nantes

Un bassin océanique est une piscine équipée d'un générateur de vagues permettant de tester de nombreux équipements dans leur milieu d'utilisation, rivière ou mer. Les structures étudiées vont du navire de pêche, au navire de transport, en passant par des équipements liés aux énergies marines renouvelables telles que des éoliennes posées, flottantes, des hydroliennes ou des systèmes houlomoteurs.



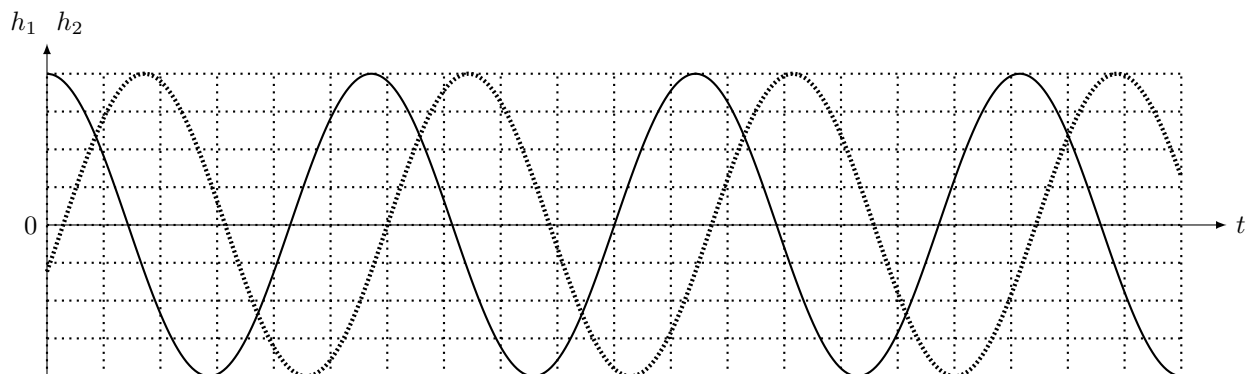
Dans ce problème, on s'intéresse au bassin de l'école Centrale Nantes, l'un des plus importants d'Europe. Profond de 5 m, long de 50 m et large de 30 m, il permet de générer des vagues pouvant atteindre 1 m d'amplitude. On étudie ici la propagation d'une vague à la surface de l'eau.

Dans tout le problème, les vagues seront assimilées à des ondes unidimensionnelles $h(x, t)$. On considère le bassin au repos de profondeur H . Une vague, modélisée par une onde progressive harmonique, de longueur d'onde λ s'y propage.

1. Rappeler la définition d'une onde progressive. La vague est elle une onde mécanique ou électromagnétique ? longitudinale ou transversale ? Justifier.
2. Pour une onde, donner la relation entre c la célérité, f la fréquence, et λ la longueur d'onde.
3. Sachant que ce bassin est utilisé sur des modèles de navires réduits à l'échelle 1/20, il permet de reproduire des conditions de tempêtes avec des vagues pouvant atteindre quelle hauteur ?
4. On admet que lorsque $H < \lambda$ (vagues dites "de faible profondeur"), la célérité c des vagues se propageant à la surface de l'eau ne dépend que de la profondeur H et de l'accélération de la pesanteur g . À l'aide d'une analyse dimensionnelle, justifier l'expression de c en fonction de g et H suivante $c = \sqrt{gH}$. Effectuer l'application numérique pour les ondes se propageant dans le bassin (on prendra pour valeur $g = 9,81 \text{ USI}$).
5. Pour estimer la célérité du tsunami à la surface de l'océan, sachant que la profondeur moyenne des océans est de 4 km et que la longueur d'onde vaut $\lambda \simeq 100 \text{ km}$, peut-on utiliser la formule de célérité précédente ? Effectuer l'application numérique et commenter l'affirmation suivante "il est difficile de prévenir à temps les populations lors d'un tsunami".

On génère dans le bassin une vague assimilée à une onde progressive sinusoïdale selon un axe (Ox) dans la direction $+x$. Pour mesurer la célérité c , on place deux bouées fixes séparées d'une distance $d = 3,0 \text{ m}$. On note x_1 la position de la première bouée et x_2 la position de la seconde. On enregistre les hauteurs $h_1(t) = h(x_1, t)$ (en traits pleins) et $h_2(t) = h(x_2, t)$ (en pointillés) des bouées par rapport à la surface de l'eau au repos.

On obtient les courbes suivantes (échelle en ordonnée : 0,25m/div. échelle en abscisse : 0,25 s/div).



6. Déterminer la valeur de l'amplitude h_m de la vague ainsi que de la période T de l'onde.
7. En déduire l'expression de $h_1(t)$ en fonction de h_m , T et t .
8. On note τ le temps de parcours de l'onde entre x_1 et x_2 . Établir son expression en fonction de x_1 , x_2 et c , puis en fonction de d et c . Déterminer sa valeur par lecture graphique.
9. Déterminer alors les valeurs de c et λ . Est-ce en accord avec la question 4 ?