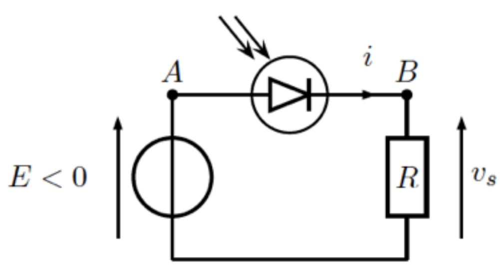
EIVP - CONCOURS INTERNE - PHYSIQUE – 2021

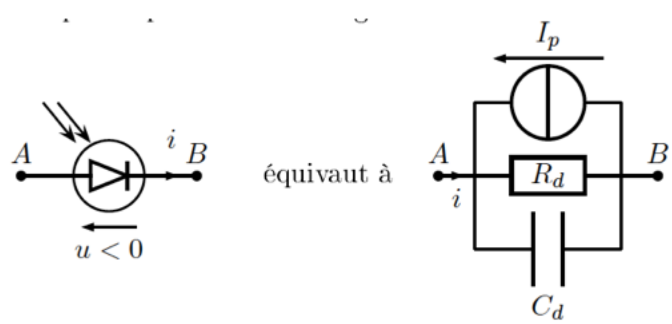
Durée : 4 heures – Sans document ni téléphone portable - Calculatrice autorisée

- Le barème tient compte des qualités de rédaction et de présentation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et indique les initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout commentaire est le bienvenu, même lorsqu'il n'est pas explicitement demandé.
- Les résultats numériques seront donnés avec une précision de 10^{-2}.
- Dans tout le sujet, *Exprimer* signifie conventionnellement *Donner l'expression littérale* et *Calculer* signifie conventionnellement *Donner la valeur numérique.*
- Après la fin du sujet, on trouvera un formulaire rappelant quelques formules utiles.

1 Système de couplage pour fibres optiques

Les communications par fibres optiques, massivement utilisées à l'heure actuelle, nécessitent des systèmes de couplage qui permettent de convertir des impulsions lumineuses guidées en signaux électriques et réciproquement. On étudie ici un tel système fonctionnant avec une photodiode. Le montage équivalent à l'ensemble est schématisé ci-après. Les flèches se dirigeant vers la photodiode au centre symbolisent le rayonnement lumineux de puissance P_l que l'on cherche à convertir en signal électrique. La photodiode, au centre sur le schéma est polarisée en inverse, c'est-à-dire que la tension E de la source d'alimentation du système est négative. Dans ces conditions, on admet que la photodiode est équivalente au circuit de droite ci-après.





On admet que le courant I_P est par propriété proportionnel à la puissance lumineuse reçue par la photodiode, P_l . On prendra $I_P = kP_l$.

Réponse statique On considère dans un premier temps une puissance lumineuse P_l indépendante du temps et on se place en régime permanent établi.

1 - Déterminer v_S dans ces conditions.

2 - A quelle condition sur I_P, R_d et E peut-on considérer que v_S est proportionnelle à P_l (on attend une inégalité forte) ? On notera $A = -v_S/P_l$ le coefficient de proportionnalité approché dans ce cas, que l'on exprimera en fonction de k, R_d et R.

Réponse à une impulsion lumineuse On s'intéresse maintenant à la réponse du circuit lorsque la puissance $P_l(t)$ est variable dans le temps.

3 - Déterminer l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $v_S(t)$ dans ce cas. Faire apparaître un temps typique τ que l'on exprimera en fonction de R, R_d et C_d. Mettre le second membre sous la forme $G(t)/\tau$ où $G(t)$ est une fonction de R, R_d, E, A et P_l.

4 - Exprimer la tension $v_{S,obs}$ au bout d'un temps très long d'obscurité. **On ne tiendra pas compte de cette tension dans la suite** (soit parce qu'elle n'est pas détectable, soit parce qu'il suffit de faire le « zéro » du détecteur dans ces conditions). Montrer que dans ce cas, l'équation différentielle devient dans ce cas :

$$\frac{dv_S}{dt} + \frac{v_S}{\tau} = \frac{-AP_l}{\tau}$$

On considère que le détecteur est exposé à une impulsion lumineuse de durée Δt telle que $P(t) = P_0$ si $t \in [0; \Delta t]$ et $P(t) = 0$ hors de cet intervalle. On suppose que $v_S(t < 0) = 0$.

5 - Exprimer la tension $v_S(t)$ pour $t \in [0; \Delta t]$. En prenant garde aux conditions de raccordement, en déduire $v_S(t)$ pour $t \in [\Delta t; +\infty]$.

6 - Représenter graphiquement $v_S(t)$ en précisant la valeur maximale atteinte par $|v_s|$ notée v_{smax}. On exprimera v_{smax} en fonction des données du problème.

On considère les deux instants t' et t" (avec $t' < t"$) pour lesquels $v_s(t) = -v_{smax}/2$ et on définie la largeur de l'impulsion détectée par $\Delta t_d = t'' - t'$.

7 - Représenter t' et t" sur le graphe précédent. Exprimer t' en fonction de Δt et τ. Exprimer de même t" en fonction des mêmes grandeurs.

8 - En déduire Δt_d en fonction de ces deux grandeurs. Simplifier cette expression dans les cas $\tau << \Delta t$ et $\tau >> \Delta t$. Commenter physiquement : à quoi est essentiellement due la largeur de l'impulsion détectée dans chacune de ces deux situations ? A l'impulsion incidente ou au temps de réponse du système de détection ?

2 Champ électrique atmosphérique

L'ionosphère est une couche supérieure de l'atmosphère, située à une altitude $H = 50km$, dont les composants gazeux sont ionisés sous l'effet du rayonnement solaire et qui peut donc être considérée comme conductrice. Entre le sol et l'ionosphère, l'atmosphère est par contre isolante. On assimile donc l'ensemble Terre - ionosphère à un condensateur sphérique. On suppose que la Terre, de rayon moyen $R = 6371km$, porte une densité surfacique de charge négative et uniforme ($\sigma > 0$). On oriente l'espace avec un axe radial $\overrightarrow{u_r}$ pointant vers l'extérieur de la Terre.

9 - Par des arguments de symétrie, indiquer la direction du champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par ce système et le signe des charges ionosphériques. Tracer quelques lignes de champ et surfaces équipotentielles, en mettant en évidence la relation entre les deux. La différence de potentiel $V = V_I - V_T$ entre l'ionosphère et la Terre sera-t-elle positive ou négative ?

10 - En appliquant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ à l'altitude $0 < r < H$ au-dessus du sol.

11 - Exprimer la différence de potentiel $V = V_I - V_T$ entre l'ionosphère et la Terre.

12 - La différence de potentiel entre la Terre et l'ionosphère vaut $V = 3 \times 10^5 V$. En déduire la densité surfacique de charge à la surface de la Terre, ainsi que la charge totale portée par la Terre.

13 - Calculer la capacité C du condensateur ainsi formé. Calculer l'énergie potentielle électrostatique du condensateur. Calculer la norme du champ électrique au niveau de la Terre. Comparer avec le champ électrique réellement mesuré, qui est de $100V/m$.

3 Disque protoplanétaire

A l'intérieur d'un disque protoplanétaire, des modèles prédisent des phénomènes de sédimentation, d'agrégations, d'accrétions, de collisions, qui aboutissent à la formation d'un système planétaire en orbite autour de son étoile, tel que c'est le cas dans notre système solaire. On étudie ici la dynamique d'une masse dans le champ de gravité du soleil.

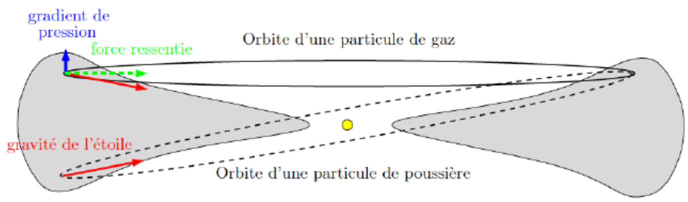
Champ de gravitation créé par le Soleil On assimile le Soleil à une sphère de rayon R_S et de masse volumique uniforme ρ_S. On repère la position d'un point dans un système de coordonnées sphériques, d'origine O, confondue avec le centre du Soleil. On notera R le rayon et $\overrightarrow{e_R}$ le vecteur unitaire radial, de sorte qu'un point M est repéré par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_R}$.

14 - Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire le champ gravitationnel $\overrightarrow{g_S}$ créé par le Soleil en un point extérieur à l'étoile. Montrer que ce champ est le même que celui créé par une masse ponctuelle M_S placée au centre de la distribution, où l'on exprimera M_S en fonction de ρ_S et R_S. Aurait-on eu le même résultat si la répartition avait été non-uniforme, mais à symétrie sphérique ?

Dans un disque protoplanétaire On considère l'étoile comme une répartition de masse à symétrie sphérique, de masse M_E. Pour déterminer le champ de gravitation créé par l'étoile, on repère la position d'un point générique dans un système de coordonnées sphériques, d'origine O, confondue avec le centre de l'étoile. On notera R le rayon générique et $\overrightarrow{u_R}$ le vecteur unitaire radial. Le théorème de Gauss pour la gravitation permet de montrer le champ gravitationnel $\overrightarrow{g_E}$ créé par cette distribution en un point extérieur à l'étoile, i.e. pour $R > R_E$ est : $\overrightarrow{g_E} = -G\frac{M_E}{R^2}\overrightarrow{u_R}$.

15 - Montrer que le mouvement d'une masse m dans ce champ de gravité est plan. De quoi dépend ce plan ? Est-il forcément le même pour toutes les masses m du disque ?

Mouvement de la poussière dans le disque Les particules du disque exercent les unes sur les autres des forces de frottement. Pour prendre en compte ces forces, il est plus simple de travailler en coordonnées cylindriques.



Orbites du gaz et de la poussière dans un disque évasé vu par sa tranche. D'après la thèse de C. Pinte.

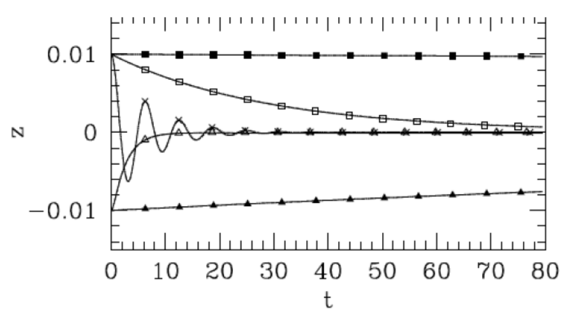
16 - On repère ainsi la position d'un point générique à l'intérieur du disque en coordonnées cylindriques, où un point générique M est caractérisé par les variables (r, z, θ). Sur le même schéma, figurer les grandeurs cylindriques et les grandeurs sphériques R et $\overrightarrow{u_R}$. En déduire que le champ $\overrightarrow{g_E}$ de l'étoile en M est donné par : $\overrightarrow{g_E} = \frac{-GM_E}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,(r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z})$.

17 - Déterminer les trois équations différentielles scalaires vérifiées par les grandeurs cylindriques.

18 - On fait ensuite l'hypothèse d'un disque fin, i.e. que $z << r$. On s'intéresse donc d'abord au mouvement d'une particule dans le plan $z = 0$. Si l'on se restreint à un mouvement à rayon r fixé, montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est une constante du mouvement et qu'elle est égale à la vitesse angulaire de rotation képlérienne, $\Omega(r)$ fonction uniquement de G, M_E et r.

19 - On se restreint maintenant à l'étude du mouvement vertical, pour un rayon axial r fixé. Montrer que, toujours pour un disque fin, l'équation de ce mouvement vertical peut se mettre sous la forme approchée : $\ddot{z} = -\omega_z^2(r)z$ où $\omega_z(r)$ est une pulsation typique des oscillations verticales que l'on exprimera en fonction uniquement de la vitesse angulaire de rotation képlérienne $\Omega(r)$.

Pour des grains de petites tailles, l'interaction avec le gaz du disque est importante. On rajoute à l'équation précédente un terme de frottement fluide de la forme $-\alpha\dot{z}$, où α est une fonction simple de la taille du grain, de la densité du grain et de celle du gaz. On obtient alors l'équation $\ddot{z} = -\omega_z^2(r)z - \alpha\dot{z}$ et les trajectoires suivantes :

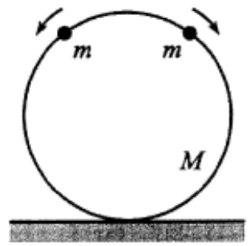


Trajectoires des grains de poussière dans le plan (t, z), pour différentes tailles de grains : 1m (croix), 10cm (triangles vides), 1cm (carrés vides), 1mm (triangles pleins), 0.1mm (carrés pleins). Les particules ont été initialement lâchées à un rayon de une unité astronomique et à une hauteur de 0.01 AU. Le temps est gradué en millions d'années. Figure extraite de Garaud et al.

20 - Analyser qualitativement les résultats et en déduire le sens de variation de α avec la taille des particules. Pour des grains de 1m, estimer le facteur de qualité. En déduire la valeur de α correspondante.

4 Deux perles sur un anneau

Deux perles percées de masses m peuvent coulisser sans frottement sur un anneau de rayon R posé verticalement sur le sol. Initialement, les deux perles sont au sommet de l'anneau et à $t = 0$, elles commencent à glisser, l'une à gauche, l'autre à droite. Sous certaines conditions, l'anneau peut décoller du sol avant que les perles ne se frappent au niveau du sol. On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution de la perle de droite, repérée par l'angle $\theta(t)$ défini depuis le centre O du cercle, repéré par rapport à la verticale, $\theta(t = 0) = 0$.



21 - Faire un schéma du système dans une situation générique. Figurer les forces qui s'appliquent sur la perle. Enoncer les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique. Montrer que l'énergie mécanique de la perle est conservée au cours du mouvement.

22 - Exprimer cette énergie mécanique pour une situation générique en fonction de θ, $\dot{\theta}$, R, m et g uniquement. En déduire une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de g, R et θ uniquement.

23 - Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la perle. En déduire l'expression de la réaction normale $N(\theta, \dot{\theta}, R, m, g)$ puis en déduire que $N(\theta) = mg(3cos\theta - 2)$.

24 - On considère à nouveau la situation où il y a deux perles de masse m en mouvements symétriques par rapport à la verticale. A l'aide du principe des actions réciproques, exprimer la réaction normale que chaque perle exerce sur l'anneau. En déduire la composante verticale de la somme des deux réactions normales exercées sur l'anneau.

25 - En fait, l'anneau est simplement posé sur le sol et il possède une masse M. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'anneau. En déduire la réaction normale que le sol exerce sur l'anneau, $R_S(\theta)$, en fonction des mêmes données que précédemment.

26 - Donner la condition pour que l'anneau décolle. Montrer que cette condition est un trinôme du deuxième ordre sur la variable $cos(\theta)$. En déduire que l'anneau décolle pour un angle θ_C donné par : $cos(\theta_c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}$. En déduire une condition sur M et m pour que l'anneau puisse décoller.