La notation tiendra compte de la présentation et de la rigueur des raisonnements. Les résultats devront être encadrés.

Lorsqu’une question n’est pas résolue on peut admettre son résultat pour traiter les questions suivantes.

Sujet 1

Dans tout l'exercice on considère des matrices de $M_2(\mathbb{R})$. Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ on appelle transposée de A, notée A^T, la matrice $A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

1) Soit $A\in M_2(\mathbb{R})$. A est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A=A^T$. On note $S_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_2(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments de $S_2(\mathbb{R})$. En déduire que $S_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Donner sa dimension et en donner une base.

2) Soit $B\in M_2(\mathbb{R})$. B est dite antisymétrique lorsque $B^T=-B$. On note $A_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_2(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments de $A_2(\mathbb{R})$. En déduire que $A_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.

3) Dans cette question on se propose de trouver les matrices $A\in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent (pour le produit) avec leur transposée, c'est-à-dire vérifiant $AA^T=A^TA$.

3.a) Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a,b,c,d réels. Montrer que $AA^T=A^TA$ si et seulement si l'une des deux propositions suivantes est vérifiée :

- $b=c$ (1)
- $b=-c$ et $a=d$ (2)

Montrer que dans le cas (2) un réel $r>0$ et une matrice de rotation R tels que $A=rR$.

Sujet 2

On pose pour tout $x>0$: $\varphi(x)=\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$.

1) Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=\frac{\sin 3x}{3x^2}-\frac{\sin x}{x^2}$. Indication : on pourra noter F une primitive de la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t^2}$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer φ à l'aide de F et de x.

En déduire que, pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=-\dfrac{4\sin^3 x}{3x^2}$.

2.a) On pose, pour tout $x\geq 0$, $f(x)=x-\sin x$. Etudier la variation de f sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que, pour tout $x\geq 0$, $f(x)\geq 0$.

2.b) On pose, pour tout $x\geq 0$, $g(x)=\sin x-x+x^3$. Calculer $g', g'', g^{(3)}$. En déduire la variation de g sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que, pour tout $x\geq 0$, $g(x)\geq 0$.

2.c) Déduire de ce qui précède que, pour tout $x>0$, $x-x^3\leq \sin x\leq x$.

2.d) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)$.

Pour la suite on posera $\varphi(0)=\ell$ où $\ell=\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)$. Indication : on pourra remarquer que, pour tout $t>0$, $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right|\leq \dfrac{1}{t^2}$.

4) On a prolongé par continuité φ en 0. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

5) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^3 t}{t^2}dt$ admet une limite lorsque $x\to+\infty$. Préciser sa valeur.

Sujet 3

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. On considère la matrice $S=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$. Soit (X_1, X_2, X_3) la famille de vecteurs définie par :

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ X_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ X_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

1) Montrer que la famille (X_1, X_2, X_3) est une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer le produit $S\,X_i$ pour tout $i\in\{1,2,3\}$. En déduire que, pour tout $i\in\{1,2,3\}$, il existe un réel λ_i, qu'on précisera, tel que $S\,X_i=\lambda_i X_i$.

3) Soit $i\in\{1,2,3\}$. On définit la fonction vectorielle V_i par : $\forall t\in\mathbb{R}$, $V_i(t)=e^{\lambda_i t}X_i$.

Montrer que, $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $V_i'(t) = SV_i(t)$.

4) Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe C^1 définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$,
$V(t) = u_1(t)X_1 + u_2(t)X_2 + u_3(t)X_3$ où u_1, u_2, u_3 sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que V est solution du système différentiel $V' = SV$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $u_i' = \lambda_i u_i$. En déduire les fonctions u_i possibles.

Sujet 4

Soit f la fonction définie sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x}$.

1) Montrer que la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque $x \to 0$, donner ℓ.

On pose $f(0) = \ell$.

2) Montrer que f est dérivable en 0. Donner $f'(0)$. Montrer que f' est continue en 0. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.

3) On considère l'équation différentielle (E) $xy' + y = \dfrac{x}{1+x}$.

Résoudre l'équation homogène associée $xy' + y = 0$ sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

4) Résoudre l'équation (E) sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.

5) Existe-t-il des solutions sur $]-1,+\infty[$?