EIVP - CONCOURS INTERNE - PHYSIQUE – 2020

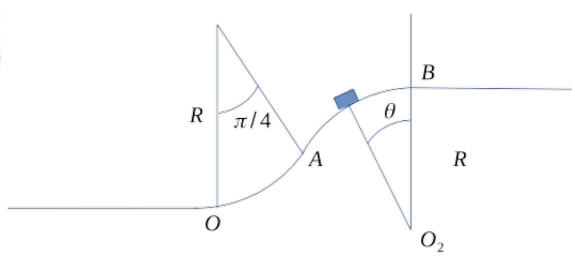
Durée : 4 heures – Sans document ni téléphone portable - Calculatrice autorisée

— Le barème tient compte des qualités de rédaction et de présentation de la copie.
— Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et indique les initiatives qu'il est amené à prendre.
— Tout commentaire est le bienvenu, même lorsqu'il n'est pas explicitement demandé.
— Les résultats numériques seront donnés avec une précision de 10^{-2}.
— Dans tout le sujet, *Exprimer* signifie conventionnellement *Donner l'expression littérale* et *Calculer* signifie conventionnellement *Donner la valeur numérique*.
— Après la fin du sujet, on trouvera un formulaire rappelant quelques formules utiles.

1 Mécanique et électrostatique

1.1 Calvin et Hobbes font de la luge

Soit la luge de Calvin et Hobbes, notée M et assimilée à une masse ponctuelle m glissant sans frottement à une vitesse v_0 sur une piste horizontale. On modélise une élévation par un huitième de cercle $\mathscr{C}_1$ de rayon R, tangent localement à la piste en un point O et au point A. Dans la suite, on désignera indifféremment l'arc $\overset{\frown}{OA}$ et $\mathscr{C}_1$. Au point A, où le huitième de cercle $\mathscr{C}_1$ fait un angle de $\pi/4$ avec l'horizontale, celui-ci est prolongé par un deuxième huitième de cercle $\mathscr{C}_2$ de centre O_2 de même rayon R, mais de concavité inverse, de sorte que le sommet de l'élévation est le point B qui correspond au point pour lequel ce deuxième huitième de cercle possède une tangente horizontale. Dans la suite, on désignera indifféremment l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et $\mathscr{C}_2$. En B, la suite de la piste est horizontale. On cherche à savoir à quelle condition la luge peut franchir l'élévation et si elle peut la franchir sans décoller. On néglige tout frottement jusqu'à précision du contraire. On signale que $(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \simeq 1,29$ et $4(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \simeq 1,17$. On note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur, supposé uniforme vertical et descendant.



1 - Enoncer les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique. Montrer que sur les arcs $\overset{\frown}{OA}$ et $\overset{\frown}{AB}$ l'énergie mécanique est conservée.

2 - En prenant $z_O = 0$, exprimer z_A, puis l'énergie potentielle de pensanteur du système en $E_P(A)$. En déduire la vitesse au point A, v_A, en fonction de g, R et v_0 uniquement, en supposant qu'elle existe.

3 - De même, exprimer z_B, puis déterminer v_B, en fonction de g, R et v_0 uniquement, en supposant qu'elle existe. En déduire une condition sur v_0 pour que la luge puisse franchir l'élévation.

On s'intéresse maintenant uniquement au mouvement de M sur $\mathscr{C}_2$. On note $\theta(t)$ l'angle entre la verticale ascendante passant par O_2, O_{2z}, et $\overrightarrow{O_2M}$.

4 - Placer sur un schéma les vecteurs polaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. Que peut-on dire de $\dot{\theta}(t)$ sachant que l'on envisage un mouvement de A à B ? Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur la base polaire. Déduire de l'une des deux équations une expression de la réaction normale du support, N, en fonction de m, g, R, θ et $\dot{\theta}$ uniquement.

5 - A l'aide de l'équation du mouvement, montrer que : $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{v_A^2}{2R^2} - \frac{g}{R}(cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2})$. En déduire l'expression de la réaction normale en fonction uniquement m, g, R, θ et v_A, puis en fonction uniquement de m, g, R, θ et v_0.

6 - En déduire une condition pour que la luge passe l'élévation sans décoller. Cette condition est-elle compatible avec la condition établie en **1** ?

On considère maintenant l'action supplémentaire d'une force de frottement $\overrightarrow{F}$ de norme constante, notée F_0, toujours dirigée dans le sens opposé à la vitesse. On considère toujours une luge qui part de O avec une vitesse de norme v_0.

7 - Exprimer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ entre O et A sur l'arc $\widehat{OA}$. En un point générique de l'arc $\widehat{AB}$, exprimer dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ la force $\overrightarrow{F}$ en fonction de F_0 uniquement. En déduire le travail de cette force entre A et un point générique repéré par l'angle θ.

8 - On suppose que la luge s'arrête en un angle θ_L. Ecrire l'équation algébrique qui permet de calculer θ_L en fonction de F_0, m, g, R et v_0 uniquement. **On ne cherchera pas à résoudre cette équation.**

1.2 Anneau dans un cerceau

Soit le système figuré ci-après, dans lequel on note R le rayon du cercle sur lequel se déplace le point M de masse m. On considère le champ de gravité terrestre comme vertical descendant, de norme g. On note l_0 la longueur à vide du ressort et k sa constante de raideur.

9 - Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base polaire. En déduire AM en fonction de R et θ. En déduire le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ dans la base polaire.

10 - Projeter le principe fondamental de la dynamique sur un vecteur qui permet d'obetenir l'équation différentielle qui régit l'évolution de $\theta(t)$.

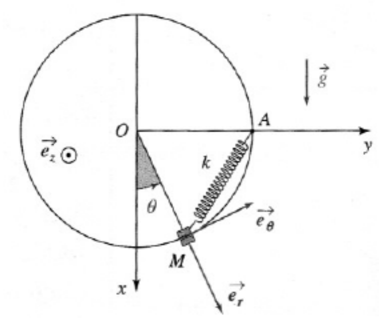
On cherche à retrouver cette équation par une méthode énergétique.

11 - Exprimer l'énergie potentielle élastique $E_{PE}(\theta)$ en fonction notamment de θ. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(\theta)$ notamment en fonction de θ.

12 - Exprimer l'énergie mécanique dans une situation générique en fonction de $\dot{\theta}$ et θ notamment. Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique.

13 - Dériver par rapport au temps l'expression de cette conservation et vérifier que l'on retrouve bien l'équation issue de la projection du principe fondamental de la dynamique.

14 - En déduire l'équation qui détermine la ou les positions d'équilibre $\theta_{eq,i}$ de ce système. **On ne cherchera pas à résoudre cette équation.**



1.3 Dans un magnétron

1.3.1 Champ électrique

Dans un magnétron, on trouve deux électrodes cylindriques coaxiales d'axe O_Z et de rayons respectifs R_C pour la cathode et $R_A > R_C$ pour l'anode. L'anode portée est à un potentiel V_0 positif et constant, correspondant à une charge surface uniforme σ_A. La cathode est à potentiel nul, correspond à une charge surfacique uniforme σ_C. L'espace compris entre l'anode et la cathode est vide ; on repère un point par ses coordonnées cylindriques.

15 - Faire un schéma du dispositif. Prévoir qualitativement les signes de σ_A et σ_C.

16 - Rappeler le théorème de Gauss. Analyser précisément les symétries et les invariances du dispositif et en déduire la direction et les dépendances du champ électrostatique créé par celui-ci. A l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrostatique dans l'espace compris entre les deux électrodes.

17 - Vérifier que le potentiel créé par cette distribution est de la forme : $V(r) = \alpha lnr + \beta$, où l'on donnera les expressions de α et β. En déduire les expressions de σ_A et σ_C en fonction de V_0 notamment.

1.3.2 Mouvement d'un électron

La cathode émet des électrons de charge $q = -e$ et de masse m avec une vitesse initiale nulle et on établit un champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_Z}$.

18 - On admet qu'en présence de ce champ magnétique, l'électron subit en plus de la force électrique, une force dite magnétique $\overrightarrow{F_B} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Exprimer cette force dans le cas général en coordonnées cylindriques et en déduire les trois équations différentielles scalaires qui régissent le mouvement.

19 - Déduire de l'une de ces équations que le mouvement d'un électron s'effectue dans un plan horizontal. En utilisant le fait que l'accélération orthoradiale s'écrit $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$, montrer que $\dot{\theta} = \omega_0 \left(1 - \frac{R_C^2}{r^2}\right)$ avec ω_0 fonction de e, B_0 et m.

20 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

2 Electricité : Etude d'un neurone artificiel

La réalisation d'un neurone artificiel implique de mettre en oeuvre un élément susceptible de garder en mémoire des états passés. Pour ce faire, on utilise souvent des éléments semi-conducteurs non-linéaires bistables.

2.1 Eléments non-linéaires bistables en physique

La figure 2 montre la caractéristique $I - V$ dite en forme de "S" d'un élément non-linéaire X. Dans la gamme de tensions comprises entre $U_h = 4.00V$ (tension de maintien) et $U_{th} = 10.0V$ (tension seuil) cette caractéristique $I - V$ a plusieurs valeurs et est linéaire par morceaux (chaque branche est un segment de droite). En particulier, la demi-droite de la branche supérieure passe par l'origine lorsqu'elle est prolongée.

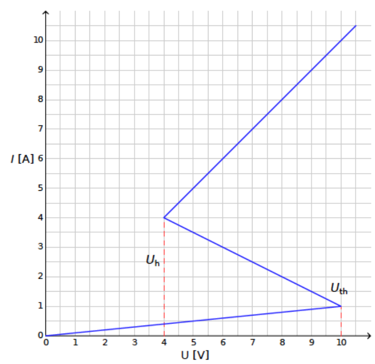


Figure 2 - Caractéristique $I - V$ d'un élément non-linéaire X.

21 - A partir du graphe, déterminer la résistance R_{on} de l'élément X modélisant la branche supérieure de la caractéristique $I - V$, ainsi que la résistance R_{off} pour la branche inférieure.

La branche du milieu est décrite par l'équation : $I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}$

22 - Trouver grâce au graphe précédent les valeurs des paramètres I_0 et R_{int}.

L'élément non-linéaire X est connecté en parallèle à un condensateur de capacité $C = 10^{-6}F$. Ce bloc est ensuite connecté en série à une résistance $R = 3.00\Omega$ et à une source de tension constante idéale $\mathscr{E} = 15.0V$. Il apparaît que ce circuit se met à osciller et que l'élément non-linéaire X saute d'une branche de sa caractéristique $I - V$ à une autre au cours du cycle de l'oscillation.

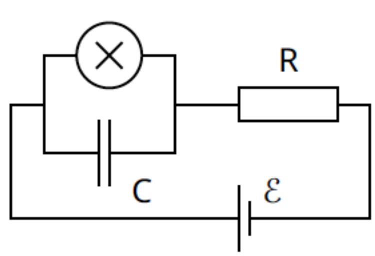


Figure 3 - Circuit avec l'élément X, le condensateur C, la résistance R et la source de tension $\mathscr{E}$.

23 - Supposons que le circuit démarre dans le mode de fonctionnement off à partir d'une valeur $I_{X0} = 0$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $I_X(t)$, l'intensité traversant l'élément X dans cette situation. En prédire qualitativement l'évolution et montrer à l'aide d'un argument numérique que le dipôle finit forcément par sauter en mode *on*. On admettra que le système ne peut pas fonctionner dans la branche intermédiaire.

24 - Lors de ce saut, justifier que la tension U aux bornes de l'élément X est continue. Déterminer de même l'équation de fonctionnement dans ce mode et prédire qualitativement l'évolution. En déduire, là encore à l'aide d'un argument numérique, que le système finit forcément par revenir en mode off.

25 - Dessiner le cycle d'oscillation sur le graphe $I - V$ en indiquant le sens de parcours au cours du temps.

26 - On se place en régime périodique établi. Exprimer les expressions pour les temps de parcours t_{off} et t_{on} de chaque branche du graphe $I - V$ durant un cycle d'oscillation en fonction notamment de U_h, U_{th}, R, R_{on}, R_{off}, C et E. Déterminer leurs valeurs numériques. Trouver la valeur numérique d'une période d'oscillation T en admettant que le temps nécessaire pour les sauts entre les branches du graphe $I - V$ est négligeable.

2.2 Eléments non-linéaires bistables : le neuristor

Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à l'application des éléments non-linéaires bistables à la modélisation de processus biologiques. Un neurone dans le cerveau humain a la propriété suivante : excité par un signal externe, il effectue une seule oscillation et retourne ensuite dans son état initial. Cette propriété est appelé excitabilité. Grâce à cette propriété, des impulsions peuvent se propager dans le réseau de neurones interconnectés constituant le système nerveux. Une puce semiconductrice construite pour imiter l'excitabilité et la propagation d'impulsion est appelée un neuristor (de neurone et transistor). Nous essayons de modéliser un simple neuristor avec un circuit incluant l'élément non-linéaire X étudié précédemment. Pour cela, la tension $\mathscr{E}$ sur le circuit de la figure 4 est diminuée à la valeur de $\mathscr{E}\prime = 12.0V$. Les oscillations s'arrêtent, et le système atteint un état stationnaire. Ensuite, la tension est rapidement augmentée à la valeur de $\mathscr{E} = 15.0V$. Après un temps τ, on impose une tension de $\mathscr{E}\prime = 12.0V$.

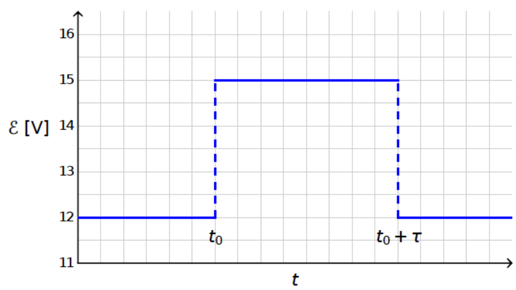


Figure 4 - Evolution temporelle de $\mathscr{E}$

27 - Expliquer qualitativement qu'il existe une valeur τ_{crit} de τ à partir de laquelle il y a un changement complet de la réponse temporelle de l'élément X pour l'évolution donnée de $\mathscr{E}$. Esquisser les graphes de la dépendance temporelle du courant $I_X(t)$ de l'élément non-linéaire X pour $\tau < \tau_{crit}$ et pour $\tau > \tau_{crit}$, en figurant les évolutions avant t_0, entre t_0 et $t_0 + \tau$ et après $t_0 + \tau$, dans les deux cas possibles.

28 - Déterminer l'expression et la valeur numérique du temps critique τ_{crit} pour lequel le comportement du circuit change. Le circuit avec $\tau = 10^{-6}s$ est-il un neuristor ?

Formulaire

— *Produit vectoriel :* $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$

— *Gradient en coordonnées cylindriques :* $\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

— *Equation caractéristique du condensateur en convention récepteur :* $i_c = C\frac{dU_c}{dt}$