Le sujet comporte 4 exercices totalement indépendants. Ils peuvent être faits dans n'importe quel ordre. En revanche il faut traiter les questions d'un même exercice dans l'ordre, quitte à sauter les questions que vous n'arrivez pas à résoudre. Vous pouvez aussi admettre le résultat d'une question pour faire les suivantes.

Exercice 1 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les matrices N de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec D, c'est-à-dire vérifiant $ND = DN$.

2) Soit N une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $N^2 = D$. Montrer que N commute avec D. En déduire les matrices N possibles.

3) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P ($P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$).

4) Calculer $P^{-1}AP$.

5) On se propose de trouver les matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$. Soit $N = P^{-1}M\,P$.
Montrer que $M^2 = A$ si et seulement si $N^2 = D$. En déduire une méthode pour trouver les matrices M possibles (on ne demande pas d'effectuer les calculs).

Exercice 2 :

Soit n un entier, $n \geq 2$. On définit la fonction f_n par : pour tout réel x, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1) Etudier la variation de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

2) Montrer que, pour tout entier n, $n \geq 2$, il existe un unique $u_n \in [0,1]$, tel que $f_n(u_n) = 0$.

3) Vérifier que, $\forall n \geq 2$, $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \geq 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, puis que cette suite converge.

4) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$. Montrer que $u_n \sim \dfrac{2}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 :

On appelle E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de de degré inférieur ou égal à 3.

1) Rappeler la dimension et la base usuelle de E.

2) On note P_1, P_2, P_3, P_4 les polynômes suivants :

$P_1 = X(X-1)$; $P_2 = (X+1)(X-1)$; $P_3 = X(X+1)$; $P_4 = X(X+1)(X-1)$.

Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est libre. En déduire qu'elle est une base de E.

3) On définit l'application f sur E par :
$f(P) = X(X-1)P(-1) + (X+1)(X-1)P(0) + X(X+1)P(1)$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3)$, $f(P_4)$. En déduire une base du noyau de f ($\ker f$) et une base de l'image de f ($\operatorname{Im} f$).

Exercice 4 :

1) Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Dans les questions qui suivent, on se propose de trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\,dt = 1 \ . \quad (1)$$

2) Soit f une fonction continue vérifiant (1). Montrer que f est dérivable et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) + \int_0^x f(t)\,dt = 0 \, . \quad (2)$$

Indication : on pourra remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt + 1$.

Donner la valeur de $f(0)$, puis celle de $f'(0)$.

3) Montrer que f est deux fois dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$. Déterminer f.